ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №12
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Сформулируем теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $y'' = f(x, y, y')$.

Теорема. Если в некоторой окрестности значений x_0, y_0, y_0' функция $f(x, y, y')$ определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial y'}$, то существует такая окрестность точки $(x_0; y_0; y_0')$ (в пространстве R^3), в которой задача Коши для уравнения (4) с начальными условиями $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$ имеет решение, и притом единственное.

Общее решение уравнения второго порядка зависит от двух произвольных постоянных, т.е. имеет вид $y = \varphi(x, C_1, C_2)$. Это вполне согласуется с существованием и единственностью решения задачи Коши: из равенств $\varphi(x_0, C_1, C_2) = y_0$, $\varphi'(x_0, C_1, C_2) = y_0'$ вообще говоря, однозначно определяются значения C_1 и C_2, а значит, и частное решение уравнения.

Пример. Общее решение уравнения $y'' = 0$ имеет вид $y = C_1 x + C_2$. Таким образом, интегральные кривые представляют собой прямые на плоскости. Через данную точку $(x_0; y_0)$ плоскости в данном направлении, характеризуемом угловым коэффициентом y_0' проходит интегральная кривая, и притом единственная.

Пример. Рассмотрим уравнение $y'' + y = 0$. Нетрудно проверить, что оно имеет частные решения $y_1(x) = \cos x$ и $y_2(x) = \sin x$. Функция

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

при любых значениях постоянных C_1 и C_2 также является решением, поскольку

$$(C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + (C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$
$$= C_1(y_1'' + y_1) + C_2(y_2'' + y_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Это решение зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2. Каковы бы ни были числа x_0, y_0, y_0' (начальные условия задачи Коши), существует единственная функция вида $C_1 \cos x + C_2 \sin x$, удовлетворяющая условиям

$y\big|_{x=x_0} = y_0$ и $y'\big|_{x=x_0} = y'_0$. Например, если $x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ y'_0 = 1,$ то для нахождения C_1 и C_2 имеем условия

$$y\big|_{x=x_0} = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 1, \quad y'\big|_{x=x_0} = -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = 1,$$

из которых следует $C_1 = 1,\ C_2 = 1,$ т.е. $y = \cos x + \sin x.$

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка называется **линейным,** если оно имеет вид

$$\alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y = \delta(x),$$

где левая часть линейна по отношению к $y,\ \ y',\ \ y''$.

Предполагая, что $\alpha(x) \neq 0,$ и разделив обе части уравнения на $\alpha(x),$ придем к уравнению

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \qquad (*)$$

Будем считать функции $p(x),\ q(x),\ f(x)$ непрерывными; согласно теореме 1 это обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши для уравнения (*).

При рассмотрении уравнения (*) важную роль играет уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad (**)$$

которое называется **линейным однородным уравнением,** соответствующим уравнению (*).

Для системы, состоящей из двух функций $y_1(x), y_2(x)$, определитель Вронского имеет вид

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix},$$

для системы из трех функций $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}_3(\boldsymbol{x})$ – вид

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y''_1 & y''_2 & y'' \end{vmatrix}$$

и т.д. Отметим, что как сами функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$ так и их определитель Вронского являются функциями от x.

Теорема. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два линейно независимых решения уравнения (**), то их определитель Вронского $W(y_1, y_2)$ ни при одном значении x не обращается в нуль.

Для любой пары решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (**) имеются только две возможности:

$y_1(x),\ y_2(x)$ линейно зависимы, тогда $W(y_1, y_2) = 0$ при любом значении x;

$y_1(x),\ y_2(x)$ линейно независимы, тогда $W(y_1, y_2) \neq 0$ при любом значении x.

Упражнение

Установить линейную зависимость или независимость данных пар функций на областях их определения:

а) $x, \cos x$; б) $x, 2x$; в) $tgx, ctgx$.

Теорема ***(о структуре множества всех решений однородного уравнения)***. Если два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (**) линейно независимы, то любое решение уравнения можно представить в виде их линейной комбинации.

Набор из двух линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (**) называется **фундаментальной системой решений** этого уравнения.

Согласно предыдущему, для фундаментальности системы $y_1(x), y_2(x)$ необходимо и достаточно выполнение условия $W(y_1, y_2) \neq 0$. Используя данное определение, последнюю теорему можно сформулировать по-другому. Ее новая формулировка выглядит так:

если $y_1(x), y_2(x)$ – какая-либо фундаментальная система решений однородного уравнения (**), то общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример. Для уравнения $y'' - y = 0$ функции $y_1(x) = e^x$ и $y_2(x) = e^{-x}$ являются частными решениями. Эти решения линейно независимы (образуют фундаментальную систему), так как их определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2$$

отличен от нуля. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Пример. Для уравнения $y'' + y = 0$ очевидными частными решениями являются функции $y_1(x) = \cos x$ и $y_2(x) = \sin x$. Их определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1;$$

следовательно, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы. Общее решение есть

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' - y' + \frac{1}{x}y = 0$.

Решение

В данном случае одним из решений является функция $y_1 = x$. Будем искать второе частное решение с помощью подстановки $y = y_1 u$, где u – новая неизвестная функция (можно показать, что такой способ нахождения второго решения применим к любому линейному уравнению). Имеем

$$y' = u + xu', \qquad y'' = 2u' + xu'';$$

уравнение принимает вид

$$2u' + xu'' - u - xu' + u = 0, \text{ или } \; xu'' + (2 - x)u' = 0.$$

Так как в полученное уравнение входит не сама неизвестная функции u, а лишь ее производные, то можно понизить порядок уравнения с помощью подстановки $v = u'$. Получим

$$xv' + (2 - x)v = 0, \text{ или } \; \frac{dv}{v} = \frac{x-2}{2}dx,$$

откуда $v = \frac{e^x}{x^2}$. Следовательно, $u = \int v dx = \int \frac{e^x}{x^2} dx$, и искомое решение

$y_2(x) = x\int \frac{e^x}{x^2} dx$. Линейная независимость $y_1(x)$ и $y_2(x)$ очевидна. Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 x + C_2 x\int \frac{e^x}{x^2} dx$$

(написанный справа интервал не выражается в элементарных функциях).

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{1}$$

Пусть нам известна какая-то фундаментальная система частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ однородного уравнения. Тогда общее решение однородного уравнения, как мы знаем, имеет вид $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Для отыскания же общего решения уравнения (1) теперь достаточно найти какое-нибудь частное решение этого уравнения. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема. Общее решение неоднородного уравнения (1) есть сумма частного решения $y_*(x)$ этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения (**).

Пример. Найти частное решение уравнения

$$y'' - \frac{y'}{x} = 1 \quad (x > 0),$$

используя тот факт, что однородное уравнение $y'' - \frac{y'}{x} = 0$ имеет линейно независимые частные решения $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x^2$.

Решение

Представим искомое решение y в виде $y = u_1 \cdot 1 + u_2 x^2$. Для нахождения u_1 и u_2 имеем систему уравнений, которая в данном случае принимает вид

$$u_1' + u_2' x^2 = 0,$$
$$u_2' \cdot 2x = 1.$$

Отсюда $u_2' = \frac{1}{2x}$, $u_1' = -\frac{1}{2}x$; следовательно,

$$u_2 = \frac{1}{2}\ln x, \quad u_1 = -\frac{1}{4}x^2.$$

Искомое решение имеет вид $y_*(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x.$

Упражнения

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = \frac{1}{1+x^2} + x - \sin x.$$

2. Найти частное решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'' = \left(e^{2x} + \sin 3x\right)x, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

3. Решить дифференциальное уравнение $y'' - y' ctgx = 2x \sin x$. Найти также частное решение, если $y = 1$, $y' = 0$ при $x = \frac{\pi}{4}$.

Решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка требует знания какой-нибудь фундаментальной системы частных решений. Если коэффициенты уравнения не постоянны, т. е. действительнозависят от x, то нахождение такой системы представляет, вообще говоря, трудную задачу. Значительно проще обстоит дело в случае уравнения с постоянными коэффициентами, т.е. уравнения вида

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{2}$$

где p и q - постоянные. Для этого случая можно указать простой способобпостроения фундаментальной системы решений.

Будем искать частное решение уравнения (2) в виде показательной функции $y = e^{\lambda x}$. Дифференцируя дважды функцию y, получим $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$.

Подставляя выражения для функции y и ее производных в уравнение (2), приходим к соотношению

$$\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right)e^{\lambda x} = 0.$$

Так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то полученное соотношение равносильно уравнению

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \qquad (3)$$

Алгебраическое уравнение (3) называется характеристическим уравнением для дифференциального уравнения (2).

Дальнейшая схема построения фундаментальной системы решений для уравнения (2) такова. Алгебраическое уравнение (3) имеет два корня - действительных или комплексных. Обозначим их λ_1 и λ_2. Таким образом, каждая из функций $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ является решением уравнения (2). Если эти функции линейно независимы, то общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. В случае линейной зависимости указанных функций необходимы дополнительные рассуждения.

6.2. Построение общего решения. Рассмотрим все случаи, которые могут представиться при решении характеристического уравнения (3).

Первый случай: корни λ_1 и λ_2 - действительные и различные. Соответствующие им решения $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ линейно независимы. Действительно, их определитель Вронского

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \left(\lambda_2 - \lambda_1\right)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}$$

ввиду $\lambda_1 \neq \lambda_2$ отличен от нуля. Следовательно, y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Его корнями являются числа $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$. Следовательно, имеем линейно независимые частные решения $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = e^{3x}$. Общее решение запишется в виде

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Второй случай: корни λ_1 и λ_2 - комплексно сопряженные: $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ и $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, где $\beta \neq 0$. Соответствующие им комплексные решения обозначим z_1 и z_2:

$$z_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}, \qquad z_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}.$$

Они линейно независимы, поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Используя формулу Эйлера, можем записать

$$z_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \qquad z_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x),$$
откуда видно, что при любом x функции z_1 и z_2 сопряжены. Составим линейные комбинации
$$y_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_2 = \frac{1}{2}(z_1 - z_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$
Функции y_1 и y_2 являются действительными решениями уравнения (2). Эти решения также линейно независимы: в противном случае мы имели бы тождественное равенство $y_1 = Cy_2$ и (или $y_2 = Cy_1$), откуда следовала бы линейная зависимость между z_1 и z_2 . Итак, комплексно сопряженным корням $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$ характеристического уравнения можно сопоставить два линейно независимых частных решения $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Следовательно, общее решение имеет вид
$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение есть $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$. Его корни $\lambda_1 = 2 + i$ и $\lambda_2 = 2 - i$. Таким образом, имеем частные решения $y_1 = e^{2x}\cos x$, $y_2 = e^{2x}\sin x$. Общее решение записывается в виде
$$y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

Третий случай: корни λ_1 и λ_2 - равные, а значит, действительные. Будем рассуждать следующим образом (хотя это рассуждение и не имеет силы доказательства). Изменим незначительно коэффициенты p и q уравнения так, чтобы вместо двух равных корней λ_1 и λ_2 получились два неравных (но близких) корня λ_1^* и λ_2^*. Соответствующие решения $y_1 = e^{\lambda_1^* x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2^* x}$ являются различными. Составим из них линейную комбинацию
$$\frac{e^{\lambda_2^* x} - e^{\lambda_1^* x}}{\lambda_2^* - \lambda_1^*}. \tag{4}$$
Если теперь представить, что коэффициенты уравнения (2) возвращаются к своим прежним значениям, т. е. $\lambda_1^* \to \lambda_1$, $\lambda_2^* \to \lambda_2$, то из (4) в пределе получим решение
$$y(x) = \lim_{\substack{\lambda_1^* \to \lambda_1 \\ \lambda_2^* \to \lambda_1}} \frac{e^{\lambda_2^* x} - e^{\lambda_1^* x}}{\lambda_2^* - \lambda_1^*} \tag{5}$$
исходного дифференциального уравнения (12). Для нахождения правой части соотношения (5) воспользуемся тем, что по теореме Лагранжа для любых a и b имеет место равенство $e^a - e^b = (a - b)e^{\xi}$, где точка ξ находится между a и

b. В частности, $e^{\lambda_2^* x} - e^{\lambda_1^* x} = (\lambda_2^* - \lambda_1^*) e^{\lambda x}$, где λ находится между λ_1^* и λ_2^*. Поэтому правая часть соотношения (5) равна $xe^{\lambda_1 x}$. Таким образом, кроме решения $e^{\lambda_1 x}$, имеем решение $xe^{\lambda_1 x}$.

Итак, равным корням $\lambda_1 = \lambda_2$ характеристического уравнения можно сопоставить два частных решения $e^{\lambda_1 x}$, $xe^{\lambda_1 x}$. Они линейно независимы (проверить это самостоятельно); следовательно, общее решение

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение есть $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Его корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Общее решение уравнения имеет вид

$$y == e^x (C_1 + C_2 x).$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{6}$$

где $f(x)$ - некоторая заданная функция; коэффициенты p и q по-прежнему считаем постоянными. Согласно теореме 6, для построения общего решения уравнения (6) достаточно найти какое-нибудь частное решение этого уравнения, а также общее решение соответствующего однородного уравнения. Поскольку второе мы уже умеем делать, задача сводится к нахождению частного решения уравнения (6).

Для решения этой задачи можно воспользоваться методом вариации произвольных постоянных. Однако во многих важных для практики случаях имеется и более простой способ. Он применим в случае, когда $f(x)$ есть функция вида $P(x)e^{\alpha x}$, где $P(x)$ - многочлен. Укажем суть этого способа, не вникая в его обоснование.

Первый случай: число α не является корнем характеристического уравнения. Тогда решение нужно искать в виде

$$y = Q(x)e^{\alpha x},$$

где $Q(x)$ - многочлен той же степени, что и $P(x)$. Записав $Q(x)$ в виде многочлена с неопределенными коэффициентами и подставив выражение для y в уравнение (6), после сокращения обеих частей на $e^{\alpha x}$ получаем равенство двух многочленов (из которых один есть $P(x)$). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим систему уравнений, из которой найдем коэффициенты многочлена $Q(x)$.

Особо отметим два частных случая:

1) $f(x) = P(x)$, т.е. правая часть уравнения (6) представляет собой многочлен от x. В этом случае имеем $\alpha = 0$; следовательно, если число 0 не явля-

ется корнем характеристического уравнения, то решение ищем в виде $y = Q(x)$;

2) $f(x) = e^{\alpha x}$. Тогда $P(x) = 1$ есть многочлен нулевой степени, а значит, $Q(x) = c = const$. Если при этом число α не является корнем характеристического уравнения, то решение ищем в виде $y = ce^{\alpha x}$.

Пример. Найти частное решение уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = (12x - 55)e^{-x}.$$

Решение

В данном случае $\alpha = -1$. Корнями характеристического уравнения являются 2 и 3; число α не совпадает ни с одним из них. Поэтому решение ищем в виде $y = (ax + b)e^{-x}$. Дифференцируя выражение для y, находим

$$y' = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} = (-ax + a - b)e^{-x},$$

$$y'' = -ae^{-x} - (-ax + a - b)e^{-x} = (-ax - 2a + b)e^{-x}.$$

Подставляя y, y', y'' в уравнение и сокращая обе части на e^{-x}, приходим к тождественному равенству

$$(ax - 2a + b) - 5(-ax + a - b) + 6(ax + b) = 12x - 55,$$

или

$$12ax - 7a + 12b = 12x - 55,$$

откуда

$$\begin{cases} 12a = 12, \\ -7a + 12b = -55. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a = 1,\ b = -4$. Следовательно, искомое частное решение данного уравнения есть $y = (x - 4)e^{-x}$.

Второй случай: один из корней характеристического уравнения равен α, а второй корень отличен от α. Тогда частное решение следует искать в виде

$$y = xQ(x)e^{\alpha x}.$$

Пример. Найти частное решение уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = (8x + 10)e^{3x}.$$

Решение

Здесь $\alpha = 3$. Корнями характеристического уравнения являются - 1 и 3, один из них совпадает с $\alpha = 3$. Поэтому решение ищем в виде $y = x(ax + b)e^{3x}$.

Подставляя y, y', y'' в уравнение и сокращая обе части на e^{3x}, приходим к тождественному равенству

$$8ax + 2a + 4b = 8x + 10,$$

откуда

$$\begin{cases} 8a = 8, \\ 2a + 4b = 10. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a = 1,\ b = 2$. Следовательно, искомое частное решение данного уравнения есть $y = x(x+2)e^{3x}$.

Третий случай: оба корня характеристического уравнения равны α. Тогда частное решение следует искать в виде

$$y = x^2 Q(x) e^{\alpha x}.$$

Пример. Найти частное решение уравнения

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}.$$

Решение

Здесь $\alpha = -1$ и оба корня характеристического уравнения также равны -1. Поэтому решение ищем в виде $y = ax^2 e^{\alpha x}$. Проведя такие же вычисления, что и в примерах 8 и 9, получим $a = 1{,}5$. Искомое решение имеет вид $y = 1{,}5x^2 e^{\alpha x}$.

Упражнения

1. Найти общее решение уравнения $2y'' - 3y + y = 0$.
2. Найти общее решение уравнения $4y'' + 4y + y = 0$.
3. Найти общее решение уравнения $2y'' + y + 3y = 0$.
4. Найти частное решение уравнения $3y'' + 7y + 4y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, \quad y'(0) = -\dfrac{2}{3}$.
5. Найти общее решение уравнения $y'' - 7y' = 5xe^{x}$, подбирая частное решение методом неопределенных коэффициентов.
6. Найти общее решение уравнения
$$y'' + 6y' + 9y = (x-2)e^{-2x}.$$
7. Решить уравнение $y'' + 3y' + 2y = (2x+3)\sin x + \cos x$.